**Тема 18: Решение показательных уравнений**

Тема изучалась в сентябре, можно посмотреть старые конспекты.

Задания по этой теме будут в на экзаменах.  
Показательными называются уравнения, в которых неизвестное содержится в показателе степени. Простейшее показательное уравнение имеет вид: ах= аb, где а> 0, а  1, х - неизвестное.

Основные свойства степеней, при помощи которых преобразуются показательные уравнения:  а>0, b>0.

1. а0 = 1, а1= а.
2. a-n = 1/ аn
3. an× am = an+m
4. an/am = an-m
5. (an)m = an-m
6. (ab)n = an×bn
7. (a/b)n = an/bn.

При решении показательных уравнений используют два основных метода:

1. переход от уравнения af(x) = ag(x) к уравнению f(x) = g(x);
2. введение новых переменных.

**Примеры.**

1. Уравнения, сводящиеся к простейшим. Решаются приведением обеих частей уравнения к степени с одинаковым основанием.

3x = 9x – 2.

**Решение:**3x = (32)x – 2;  
3x = 32x – 4;  
x = 2x –4;  
x = 4.

**Ответ:** 4.

2. Уравнения, решаемые с помощью вынесения за скобки общего множителя.

3x – 3x-2 = 24.

**Решение:**

3x – 3x – 2 = 24  
3x – 2(32– 1) = 24  
3x – 2× 8 = 24  
3x – 2= 3  
x – 2 = 1  
x = 3.

**Ответ:** 3.

3. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной.

4x + 2x= 12.

**Решение:**

22x + 2x– 12 = 0  
Обозначаем 2x = у.  
y2 + y – 12 = 0  
y1 = - 4; y2 = 3.  
a) 2x = - 4.Уравнение не имеет решений, т.к. 2х> 0.  
б) 2x = 3; 2x= 2log23; x = log23.

**Ответ:** log23.

4. Уравнения, содержащие степени с двумя различными (не сводящимися друг к другу) основаниями.

3 × 2х + 1 - 2 × 5х – 2 = 5х + 2х – 2.

Решение:

3× 2х + 1 – 2х – 2 = 5х – 2 × 5х – 2  
2х – 2 ×23 = 5х – 2  
×23  
2х – 2 = 5х – 2  
(5/2)х– 2 = 1  
х – 2 = 0  
х = 2.

**Ответ:**2.

# Показательные неравенства

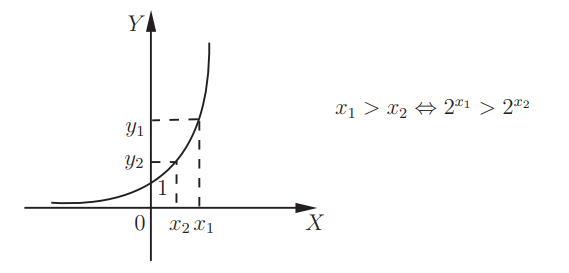
Знакомство с этой темой мы начнем с самых простых показательных неравенств.

1. 2x > 8

Так же, как и при решении простейших показательных уравнений, представим правую часть в виде степени числа 2:

2x > 23

Когда я спрашиваю школьников, что делать дальше, они обычно отвечают: «Убрать основания!» Я не против такой формулировки, просто надо четко представлять себе, почему мы так делаем. А для этого — вспомним, как выглядит график показательной функции y = 2x.

  
Видим, что эта функция монотонно возрастает, то есть большему значению x отвечает большее значение y. И наоборот, если 2x1 > 2x2, то x1 > x2 . Итак, от неравенства 2x > 23 можно перейти к алгебраическому неравенству x > 3.

Ответ: \small x \in (3; +\infty ).

2. Следующее неравенство:

2x > 7

Так же, как и в предыдущем примере, представим правую часть в виде значения показательной функции. Как это сделать? С помощью логарифма, конечно:  
7 = 2log27.

Получаем:

2x > 2log27;

x > log27.

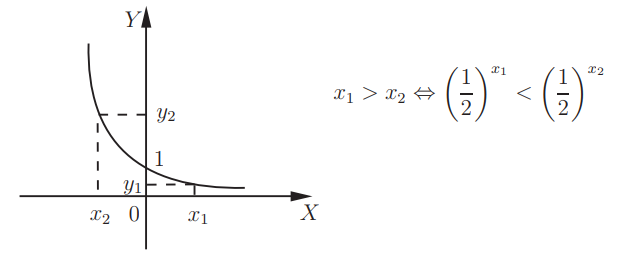
3. Еще одно неравенство:

https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d%3E\frac%7b1%7d%7b16%7d

Здесь правую часть удобно представить как https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7b4%7d.

https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d%3E\left&space;(\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7b4%7d.

Вспомним, как выглядит график функции https://latex.codecogs.com/png.latex?y=\left&space;(&space;\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d:



Эта функция монотонно убывает (так как основание степени меньше единицы), поэтому большее значение функции соответствует меньшему значению аргумента. То есть из неравенства https://latex.codecogs.com/png.latex?\left&space;(&space;\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7bx%7d&space;%3E&space;\left&space;(&space;\frac%7b1%7d%7b2%7d&space;\right&space;)%5e%7b4%7d следует, что x < 4. Знак неравенства меняется!

4. Решите неравенство *3^{x+1}+9\cdot 3^{-x}\le 28.*

3^{x+1}+9\cdot 3^{-x}\le 28 

3\cdot 3^x+9\cdot \frac{1}{3^x}-28\le 0 

\frac{3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+9}{3^x}\le 0 

Умножим обе части неравенства на 3^x \textgreater 0. 

Сделаем замену 3^x=t,t \textgreater 0. Получили квадратичное неравенство относительно переменной t.

3t^2-28t+9\le 0 

D=b^2-4ac={28}^2-4\cdot 3\cdot 9={26}^2 

t_1=\frac{28-26}{6}=\frac{1}{3} 

t_2=\frac{28+26}{6}=9. 

**Внимание.** Сначала решаем неравенство относительно переменной t. Только после этого возвращаемся к переменной х. Запомнили?

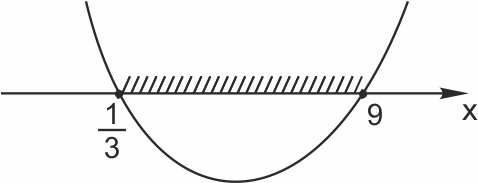
Разложим левую часть неравенства на множители.

ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), 

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения ax^2+bx+c=0. Получим:

3\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t-9\right)\le 0 

\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t-9\right)\le 0 

[](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2019/09/235.jpg)

\frac{1}{3}\le t\le 9. Только теперь возвращаемся к переменной х.

\frac{1}{3}\le 3^x\le 9 

3^{-1}\le 3^x\le 3^2. «Отбрасываем» основания степеней и получаем ответ.

-1\le x\le 2 

Ответ: x\in \left [-1;2\right] 

Задания для решения

1. Решить неравенство: 5х+1+5х+5х – 1 ≤ 31.
2. Решить неравенство: 271-х ≥.
3. Решить неравенство: 82х+1 > 0,125.
4. Решить неравенство: 3х+2 – 5·3х ≤ 36.
5. Решить неравенство: 36 · 2163х+1 ≥ 1.
6. Решить неравенство:1002х+1 < 0,1.
7. Решить неравенство:≤ 32 – х< 27.
8. Решить неравенство:
9. Решить неравенство:271+2х >2+х.
10. Решить неравенство:9 · 811 - 2х ≥ 272 – х.