**Задание по математике для студентов первого курса всех групп**

**Тема 14. Применение определённого интеграла к решению физических задач.**

**1. Схема решения задач на приложения определенного интеграла**

С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи физики, механики и т. д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Так, понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Несмотря на разнообразие этих задач, они объединяются одной и той же схемой рассуждений при их решении. Искомая величина (путь, работа, давление и т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Эту переменную величину обозначают через Х, а промежуток ее изменения – через [а, b].

Отрезок [a, b] разбивают на n равных частей, в каждой из которых можно пренебречь изменением переменной величины. Этого можно добиться при увеличении числа разбиений отрезка. На каждой такой части задачу решают по формулам для постоянных величин.

Далее составляют сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2.gif, находят искомую величину I в виде интеграла

I = https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4.gif, где f(x) – данная по условиям задачи функция (сила, скорость и т. д.).

**2. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении**

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле S = vt.

Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t, т. е. v = f(t), то для нахождения пути, пройденного телом за время от https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0000.gif до https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0000.gif, разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt. В каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда пройденный телом путь будет приблизительно равен сумме https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6.gif , т.е.

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8.gif  
Если функция v(t) непрерывна, то  
https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10.gif  
Итак,  
https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img12.gif

**3. Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела**

Пусть тело под действием силы F движется по прямой s, а направление силы совпадает с направлением движения. Необходимо найти работу, произведенную силой F при перемещении тела из положения *a* в положение *b*.

Если сила F постоянна, то работа находится по формуле https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0001.gif (произведение силы на длину пути).

Пусть на тело, движущееся по прямой Ох, действует сила F, которая изменяется в зависимости от пройденного пути, т. е.https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0001.gif . Для того чтобы найти работу, совершаемую силой F на отрезке пути от *а* до *b*, разделим этот отрезок на n равных частей https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0000.gif. Предположим, что на каждой части https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0001.gif сила сохраняет постоянное значение https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0000.gif

Составим интегральную сумму, которая приближенно равна значению произведенной работы:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0000.gif

т.е. работа, совершенная этой силой на участке от а до b, приближенно мала сумме:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img12_0000.gif

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле: https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img14.gif

**4. Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины**

Согласно закону Гука, сила F, необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.

Пусть х – величина растяжения или сжатия пружины. Тогда https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0002.gif, где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойства пружины.

Работа на участке https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0002.gif выразится формулой https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0002.gif, а вся затраченная работа https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0001.gif или https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0001.gif. Если https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img12_0001.gif то погрешность величины работы стремится к нулю.

Для нахождения истинной величины работы следует перейти к пределу

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img14_0000.gif

Итак,

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img16.gif

**5. Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку**

Из физики известно, что сила Р давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0003.gif, где https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0003.gif – плотность жидкости.

Выведем формулу для вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку произвольной формы, если ее верхний край погружен на глубину a, а нижний – на глубину b.

Так как различные части вертикальной пластинки находятся на разной глубине, то сила давления жидкости на них неодинаковa. Для вывода формулы нужно разделить пластинку на горизонтальных полос одинаковой высоты https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0003.gif. Каждую полосу приближенно можно считать прямоугольником (рис.199).

По закону Паскаля сила давления жидкости на такую полосу равна силе движения жидкости на горизонтально расположенную пластинку той же площади, погруженной на ту же глубину.

Тогда согласно формуле (4) сила давления на полосу, находящуюся на расстоянии х от поверхности, составит https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0002.gif, где https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0002.gif – площадь полосы.

Составим интегральную сумму и найдем ее предел, равный силе давления жидкости на всю пластинку:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img12_0002.gif

т.е.

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img14_0001.gif

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то а=0 и формула (5) примет вид

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img14_0002.gif

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины х погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, т.к. эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img16_0000.gif

**V. Разбор задач по теме**

1) Скорость движения материальной точки задается формулой https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0004.gif = (4 -2t +1)м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 4с от начала движения.

Решение:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0004.gif

2) Скорость движения изменяется по закону https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0003.gif м/с . Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Решение:

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0003.gif

3) Скорость движения тела задана уравнением https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0005.gif м/с. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение:

Скорость движение тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно t; получим https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0005.gif

Следовательно,

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0005.gif

4) Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0004.gif м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Решение:

Найдем время, в течении которого тело поднималось вверх: 29,4–9,8t=0 (в момент наибольшего подъема скорость равна нулю); t = 3 с. Поэтому

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0004.gif

5) Какую работу совершает сила в 10Н при растяжении пружины на 2 см?

Решение:

По закону Гука сила F, растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины , т.е. F = kx. Используя условие, находим https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0006.gif (Н/м), т.е. F = 500x. Получаем

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0006.gif

6) Сила в 60Н растягивает пружину на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 14 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см?

Решение:

Имеем https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0006.gif (H/м) и, следовательно, F=3000x. Так как пружину требуется растянуть на 0,06 (м), то

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0005.gif

7) Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Здесь y = f(x) = 20, a = 0, b = 5 м, https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0007.gif кг/https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0007.gif.

Находим

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0007.gif

8) В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение:

Здесь y = 1, a = 0,5, b = 2 + 0,5 = 2,5 (м), https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0006.gif = 1000 кг/https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0005.gif. Следовательно,

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img12_0003.gif

9) Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0008.gif. Найти уравнение движения точки.

Решение:

Известно, что скорость прямолинейного движения тела равна производной пути s по времени t, т.е. https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0008.gif, откуда ds = v dt. Тогда имеем https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0008.gif

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0007.gif

Это искомое уравнение.

10) Скорость тела задана уравнением https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0006.gif . Найти уравнение движения, если за время https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img12_0004.gif тело прошло путь https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img14_0003.gif.

Решение:

Имеем ds = v dt = (6https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img16_0001.gif+ 1) dt; тогда

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img18.gif

Подставив в найденное уравнение начальные условия s = 60 м, t = 3 c, получим

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img20.gif откуда С = 3.

Искомое уравнение примет вид

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img22.gif

11) Тело движется со скоростью https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img2_0009.gif м/с. Найти закон движения s(t), если в начальный момент тело находилось на расстоянии 5 см от начала отсчета.

Решение:

Так как ds = v dt = (https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img4_0009.gif, то https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img6_0009.gif

Из условия следует, что если t = 0, то s = 5 см = 0,05 м. подставив эти данные в полученное уравнение, имеем https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img8_0008.gif откуда 0,05 = С.

Тогда искомое уравнение примет вид

https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img10_0007.gif

**VI. Самостоятельное решение задач**

1. Скорость материальной очки изменяется по закону : https://urok.1sept.ru/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/649134/img16_0002.gif м/с. Найти путь, пройденный от начала движения до остановки.
2. Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6 см?
3. Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?
4. Скорость материальной точки изменяется по закону v = 3t- 4t – 4. Определить путь за 2 секунды от начала движения.
5. Скорость материальной точки изменяется по закону v = t2 +8t-5. Найти путь за четыре секунды от начала движения.
6. Скорость точки задана уравнением v = 24t - 8t.Найти путь, пройденный от начала движения до остановки.
7. Скорость материальной точки задана уравнением v = t2+2t +4. Найти путь, пройденный за шестm секунд от начала движения
8. Скорость точки задана уравнением v = 24t - 12t. Найти путь, пройденный от начала движения до остановки.
9. Скорость материальной точки задана уравнением v = t2+2t +4. Найти путь, пройденный за семь секунд от начала движения
10. Скорость материальной точки задана уравнением v = 6t- 2t+3. Найти путь, пройденный за 3 сек от начала движения

В задачах обязательно писать **Дано** и все вычисления должны быть подробными.