Задания по математике для студентов первого курса всех групп.

Тема 13

**Определенный интеграл. Применение определённого интеграла к вычислению площадей фигур.**
Переходим к рассмотрению приложений интегрального исчисления. На этом уроке мы разберем типовую и наиболее распространенную задачу **– как с помощью определенного интеграла вычислить площадь плоской фигуры**.

Для успешного освоения материала, необходимо:

1) Разбираться в неопределенном интеграле хотя бы на среднем уровне

2) Уметь применять формулу Ньютона-Лейбница и вычислять определенный интеграл.

В действительности, для того чтобы находить площадь фигуры не надо так уж много знаний по неопределенному и определенному интегралу. **Задание «вычислить площадь с помощью определенного интеграла» всегда предполагает построение чертежа**, поэтому гораздо более актуальным вопросом будут ваши знания и навыки построения чертежей. В этой связи полезно освежить в памяти графики основных элементарных функций, а, как минимум, уметь строить прямую, параболу и гиперболу..

Начнем с криволинейной трапеции.

**Криволинейной трапецией** называется плоская фигура, ограниченная осью , [**прямыми**](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) ,  и графиком [**непрерывной**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на отрезке  функции , которая [**не меняет знак**](http://www.mathprofi.ru/nuli_funkcii_intervaly_znakopostoyanstva_metod_intervalov.html) на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:



Тогда **площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу **. У любого определенного интеграла (который существует) есть очень хороший геометрический смысл. **С точки зрения геометрии определенный интеграл – это ПЛОЩАДЬ**.

То есть, **определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры**. Например, рассмотрим определенный интеграл . Подынтегральная функция  задает на плоскости кривую, располагающуюся выше оси  (желающие могут выполнить чертёж), а сам определенный интеграл  численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Пример 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , , , .

Это типовая формулировка задания. **Первый и важнейший момент решения – построение чертежа**. Причем, чертеж необходимо построить **ПРАВИЛЬНО**.

При построении чертежа я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций. Графики функций выгоднее строить **поточечно**, с техникой поточечного построения можно ознакомиться в справочном материале [**Графики и свойства элементарных функций**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html). Там же можно найти очень полезный применительно к нашему уроку материал – как быстро построить параболу.

В данной задаче решение может выглядеть так.
Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение  задает ось ):


Штриховать криволинейную трапецию я не буду, здесь очевидно, о какой площади идет речь. Решение продолжается так:

На отрезке   график функции  расположен **над осью **, поэтому:



Ответ:****

После того, как задание выполнено, всегда полезно взглянуть на чертеж и прикинуть, реальный ли получился ответ. В данном случае «на глазок» подсчитываем количество клеточек в чертеже – ну, примерно 9 наберётся, похоже на правду. Совершенно понятно, что если бы у нас получился, скажем, ответ: 20 квадратных единиц, то, очевидно, что где-то допущена ошибка – в рассматриваемую фигуру 20 клеточек явно не вмещается, от силы десяток. Если ответ получился отрицательным, то задание тоже решено некорректно.

Пример 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , ,  и осью 

Это пример для самостоятельного решения. Полное решение и ответ в конце урока.

Что делать, если криволинейная трапеция расположена **под осью ?**

Пример 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями ,  и координатными осями.

**Решение**: Выполним чертеж:

Если криволинейная трапеция расположена**под осью ** (или, по крайней мере, *не выше* данной оси), то её площадь можно найти по формуле: 
В данном случае:


Ответ: 

**Внимание! Не следует путать два типа задач**:

1) Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным.

2) Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в только что рассмотренной формуле фигурирует минус.

Пример 4

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями , .

**Решение**: Сначала нужно выполнить чертеж. Вообще говоря, при построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы  и прямой . Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:


Значит, нижний предел интегрирования , верхний предел интегрирования .
**Этим способом лучше, по возможности, не пользоваться**.

Гораздо выгоднее и быстрее построить линии поточечно, при этом пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой». Техника поточечного построения для различных графиков подробно рассмотрена в справке[**Графики и свойства элементарных функций**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html). Тем не менее, аналитический способ нахождения пределов все-таки приходится иногда применять, если, например, график достаточно большой, или поточенное построение не выявило пределов интегрирования (они могут быть дробными или иррациональными). И такой пример, мы тоже рассмотрим.

Возвращаемся к нашей задаче: рациональнее сначала построить прямую и только потом параболу. Выполним чертеж:

Повторюсь, что при поточечном построении пределы интегрирования чаще всего выясняются «автоматом».

**А теперь рабочая формула**: Если на отрезке  некоторая непрерывная функция **больше либо равна** некоторой непрерывной функции , то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми , , можно найти по формуле: 

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, и, грубо говоря, **важно, какой график ВЫШЕ**(относительно другого графика), **а какой – НИЖЕ**.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке  парабола располагается выше прямой, а поэтому из  необходимо вычесть 

Завершение решения может выглядеть так:

Искомая фигура ограничена параболой  сверху и прямой  снизу.
На отрезке  , по соответствующей формуле:


Ответ:****

На самом деле школьная формула для площади криволинейной трапеции в нижней полуплоскости (см. простенький пример №3) – частный случай формулы . Поскольку ось  задается уравнением , а график функции  расположен *не выше* оси , то 

А сейчас пара примеров для самостоятельного решения

Пример 5

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями , .

Пример 6

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями , .

В ходе решения задач на вычисление площади с помощью определенного интеграла иногда случается забавный казус. Чертеж выполнен правильно, расчеты – правильно, но по невнимательности… **найдена площадь не той фигуры**, именно так несколько раз лажался ваш покорный слуга. Вот реальный случай из жизни:

Пример 7

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , ,  , .

**Решение**: Сначала выполним чертеж:


…Эх, чертеж хреновенький вышел, но вроде всё разборчиво.

**Фигура, площадь которой нам нужно найти, заштрихована синим цветом** (внимательно смотрите на условие – чем ограничена фигура!). Но на практике по невнимательности нередко возникает «глюк», что нужно найти площадь фигуры, которая заштрихована зеленым цветом!

Этот пример еще полезен и тем, что в нём площадь фигуры считается с помощью двух определенных интегралов. Действительно:

1) На отрезке  над осью  расположен график прямой 

2)На отрезке  над осью  расположен график гиперболы .

Совершенно очевидно, что площади можно (и нужно) приплюсовать, поэтому:



Ответ:****

Переходим еще к одному содержательному заданию.

Пример 8

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , 
Представим уравнения в «школьном» виде ,  и выполним поточечный чертеж:

Из чертежа видно, что верхний предел у нас «хороший»: .
Но чему равен нижний предел?! Понятно, что это не целое число, но какое? Может быть ? Но где гарантия, что чертеж выполнен с идеальной точностью, вполне может оказаться что . Или корень. А если мы вообще неправильно построили график?

В таких случаях приходиться тратить дополнительное время и уточнять пределы интегрирования аналитически.

Найдем точки пересечения прямой  и параболы .
Для этого решаем уравнение:


, 

Действительно, .

На отрезке   , по соответствующей формуле:


Ответ: 

Задания для решения.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

1.  и осью ох

2 , у = 0, х = 0

3  и осью ОХ

4  и осью ОХ

5  и осью ОХ

6  и осью ОХ

*7 y = 6x ­­­­­­­­−3x2 и осью ОХ*

8 , x = 2

9  , x = 0, x = 2π, y = 0

10 y = , y = 2, x = 0

Чертежи выполнять обязательно на бумаге в клеточку, дано писать обязательно, решение должно быть подробным.