**Тема 12: Задание по математике для студентов всех групп первого курса.**

**Студентам необходимо написать конспект темы, выучить основные определения, решить приведённые ниже задания.**

**Определенный интеграл. Примеры решений**

 Для того чтобы научиться решать определенные интегралы необходимо:

1) Уметь находить неопределенные интегралы.

2) Уметь вычислить определенный интеграл.

Как видите, для того чтобы освоить определенный интеграл, нужно достаточно хорошо ориентироваться в «обыкновенных» неопределенных интегралах. Поэтому если вы только-только начинаете погружаться в интегральное исчисление, то лучше начать с урока [**Неопределенный интеграл. Примеры решений**](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html). Кроме того, есть [**pdf-курсы**](http://mathprofi.com/knigi_i_kursy/) для**сверхбыстрой подготовки** – если у вас в запасе буквально день, пол дня.

В общем виде определенный интеграл записывается так:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image002.gif  
  
Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились *пределы интегрирования*.

*Нижний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image004.gif.  
*Верхний предел интегрирования* стандартно обозначается буквой http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image006.gif.  
Отрезок http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image008.gif называется *отрезком интегрирования*.

Прежде чем мы перейдем к практическим примерам, небольшое faq по определенному интегралу.

[**Что такое определенный интеграл?**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html)  это ЧИСЛО. Да-да, самое что ни на есть обычное число.

**Есть ли у определенного интеграла геометрический смысл?** Есть. И очень хороший. Самая популярная задача – [**вычисление площади с помощью определенного интеграла**](http://www.mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html).

**Что значит решить определенный интеграл?** Решить определенный интеграл – это значит, найти число.

**Как решить определенный интеграл?**С помощью знакомой со школы [**формулы Ньютона-Лейбница**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html):

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image010.gif

Формулу лучше переписать на отдельный листочек, она должна быть перед глазами на протяжении всего урока.

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image012.gif (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image014.gif в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image016.gifявляется чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image018.gif?  Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image020.gif.

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image022.gif.

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image024.gif, то есть, находим число.

Готово.

**Всегда ли существует определенный интеграл?** Нет, не всегда.

Например, интеграла http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image026.gif не существует, поскольку отрезок интегрирования http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image028.gif не входит в [**область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html) подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными). А вот менее очевидный пример: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image030.gif. Здесь на отрезке интегрирования http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image036.gif [**тангенс**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) терпит [**бесконечные разрывы**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точках http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image032.gif, http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image034.gif, и поэтому такого определённого интеграла тоже не существует. Кстати, кто еще не прочитал методический материал [**Графики и основные свойства элементарных функций**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) – самое время сделать это сейчас. Будет здорово помогать на протяжении всего курса высшей математики.

Для того **чтобы определенный интеграл вообще существовал, достаточно чтобы подынтегральная функция была**[**непрерывной**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html)**на отрезке интегрирования**.

Из вышесказанного следует первая важная рекомендация: перед тем, как приступить к решению ЛЮБОГО определенного интеграла, нужно убедиться в том, что подынтегральная функция [**непрерывна**](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html)**на отрезке интегрирования**. В упрощенном варианте ситуация выглядит примерно так:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image038.gif???! Нельзя подставлять отрицательные числа под корень! Что за фигня?! Изначальная невнимательность.

Если для решения (в контрольной работе, на зачете, экзамене) Вам предложен интеграл вроде http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image026.gif или http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image030_0000.gif, то нужно дать ответ, что данного определённого интеграла не существует и обосновать – почему.

***! Примечание****: в последнем случае слово «определённого» опускать нельзя, т.к. интеграл с точечными разрывами разбивается на несколько, в данном случае на 3 несобственных интеграла, и формулировка «данного интеграла не существует» становится некорректной.*

**Может ли определенный интеграл быть равен отрицательному числу?** Может. И отрицательному числу. И нулю. Может даже получиться бесконечность, но это уже будет [**несобственный интеграл**](http://www.mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html), коим отведена отдельная лекция.

**Может ли нижний предел интегрирования быть больше верхнего предела интегрирования?**Может, и такая ситуация реально встречается на практике.

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image040.gif –  интеграл преспокойно вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

Без чего не обходится высшая математика? Конечно же, без всевозможных свойств. Поэтому рассмотрим некоторые [**свойства определенного интеграла**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html).

**В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак**:  
  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image042.gif

Например, в определенном интеграле перед интегрированием http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image040_0000.gif целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image044.gif – в таком виде интегрировать  значительно удобнее.

Как и для [**неопределенного интеграла**](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html), для определенного интеграла справедливы [**свойства линейности**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html):

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image046.gif

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image048.gif – это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

Пример 1

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image052.gif

Решение:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image054.gif

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image056.gif. Появившуюся константу http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image058.gif целесообразно отделить от http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image060.gif и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image062.gif. Сначала подставляем в http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image060_0000.gif верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

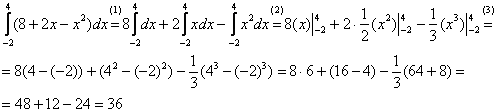
Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image065.gif

Это пример для самостоятельно решения, решение и ответ в конце урока.

Немного усложняем задачу:

Пример 3

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image067.gif

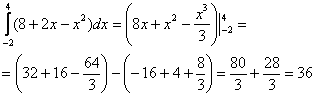
Решение:  


(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image071.gif  
СЛАБОЕ ЗВЕНО в определенном интеграле – это ошибки вычислений и часто встречающаяся ПУТАНИЦА В ЗНАКАХ. Будьте внимательны! Особое внимание заостряю на третьем слагаемом: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image073.gif – первое место в хит-параде ошибок по невнимательности, очень часто машинально пишут http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image075.gif (особенно, когда подстановка верхнего и нижнего предела проводится устно и не расписывается так подробно). Еще раз внимательно изучите вышерассмотренный пример.

Следует заметить, что рассмотренный способ решения определенного интеграла – не единственный. При определенном опыте, решение можно значительно сократить. Например, я сам привык решать подобные интегралы так:



Здесь я устно использовал правила линейности, устно проинтегрировал по таблице. У меня получилась всего одна скобка с отчёркиванием пределов: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image079.gif (в отличие от трёх скобок в первом способе). И в «целиковую» первообразную функцию, я сначала подставил сначала 4, затем –2, опять же выполнив все действия в уме.

Какие недостатки у короткого способа решения? Здесь всё не очень хорошо с точки зрения рациональности вычислений, но лично мне всё равно – обыкновенные дроби я считаю на калькуляторе.  
Кроме того, существует повышенный риск допустить ошибку в вычислениях, таким образом,  студенту-чайнику лучше использовать первый способ, при «моём» способе решения точно где-нибудь потеряется знак.

Однако несомненными преимуществами второго способа является быстрота решения, компактность записи и тот факт, что первообразная http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image081.gif находится в одной скобке.

**Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?**

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную функцию  http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image081_0000.gif подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image083.gif

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

**Такая проверка будет не лишней при вычислении любого определенного интеграла**.

Пример 4

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image085.gif

Это пример для самостоятельно решения. Попробуйте решить его коротким и подробным способом.

**Замена переменной в определенном интеграле**

Для определенного интеграла справедливы все типы замен, что и для неопределенного интеграла. Таким образом, если с заменами у Вас не очень, следует внимательно ознакомиться с уроком [**Метод замены в неопределенном интеграле**](http://www.mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html).

В этом параграфе нет ничего страшного или сложного. Новизна состоит в вопросе, **как поменять пределы интегрирования при замене**.

В примерах я постараюсь привести такие типы замен, которые еще нигде не встречались на сайте.

Пример 5

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image087.gif

Главный вопрос здесь вовсе не в определенном интеграле, а в том, как правильно провести замену. Смотрим в [**таблицу интегралов**](http://www.mathprofi.ru/tablica_integralov.pdf) и прикидываем, на что у нас больше всего похожа подынтегральная функция? Очевидно, что на длинный логарифм:  http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image089.gif. Но есть одна неувязочка, в табличном интеграле под корнем http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image091.gif, а в нашем – «икс» в четвёртой степени. Из рассуждений следует и идея замены – неплохо бы нашу четвертую степень как-нибудь превратить в квадрат. Это реально.

Сначала готовим наш интеграл к замене:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image093.gif

Из вышеуказанных соображений совершенно естественно напрашивается замена: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image095.gif  
Таким образом, в знаменателе будет всё хорошо: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image097.gif.  
Выясняем, во что превратится оставшаяся часть http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image099.gif подынтегрального выражения, для этого находим дифференциал http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image101.gif:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image103.gif

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле у нас добавляется дополнительный этап.

**Находим новые пределы интегрирования**.

Это достаточно просто. Смотрим на нашу замену http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image095_0000.gif и старые пределы интегрирования http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image105.gif, http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image107.gif.

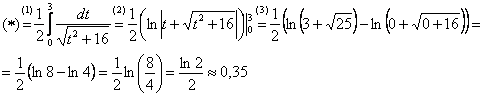
Сначала подставляем в выражение замены http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image095_0001.gif нижний предел интегрирования, то есть, ноль:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image109.gif

Потом подставляем в выражение замены http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image095_0002.gif верхний предел интегрирования, то есть, корень из трёх:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image111.gif

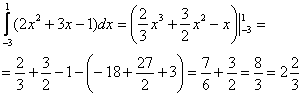
Готово. И всего-то лишь…

Продолжаем решение.



*Пример 2:****Решение****:*

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image158.gif

*Пример 4:****Решение****:*  


*Решить задания.*

1. 11. 21. 

2. 12.  22. 