**Задания по дисциплине Математика для студентов групп ОП151, АТ151, ПХ151**

**Тема 11: Неопределённый интеграл и его свойства. Вычисление неопределённого интеграла**

Необходимо написать конспект темы и решить задания.

В учебнике В. А. Гусев Математика стр 308 - 313

В учебнике М. И. Башмаков Математика стр 191 - 193

На данном уроке мы начнём изучение темы **Неопределенный интеграл**, а также подробно разберем примеры решений простейших интегралов. Что нужно знать для успешного освоения материала? Для того чтобы справиться с интегральным исчислением  Вам необходимо уметь находить производные, минимум, на среднем уровне. В этой связи нам потребуются следующие методические материалы: *Таблица производных* и *Таблица интегралов*. Справочные пособия можно открыть, закачать или распечатать на странице [**Математические формулы и таблицы**](http://www.mathprofi.ru/matematicheskie_formuly.html).

Знания и навыки по неопределенному интегралу потребуются в дальнейшей учебе, в частности, при изучении [**определенного интеграла**](http://www.mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html), [**несобственных интегралов**](http://www.mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html), [**дифференциальных уравнений**](http://www.mathprofi.ru/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii.html) на 2 курсе. Необходимость взять интеграл возникает даже в [**теории вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)!.

Итак, начинаем с простого. Посмотрим на таблицу интегралов. Как и в производных, мы замечаем несколько правил интегрирования и таблицу интегралов от некоторых элементарных функций. Нетрудно заметить, что любой табличный интеграл (да и вообще любой неопределенный интеграл) имеет вид:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image002.gif  
  
Сразу разбираемся в обозначениях и терминах:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image004.gif– значок интеграла.

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image006.gif – подынтегральная функция (пишется с буквой «ы»).

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008.gif – значок дифференциала. При записи интеграла и в ходе решения важно не терять данный значок. Заметный недочет будет.

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image010.gif – подынтегральное выражение или «начинка» интеграла.

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image012.gif – [**первообразная функция**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html).

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image014.gif – множество первообразных функций. Не нужно сильно загружаться терминами, самое важное, что в любом неопределенном интеграле к ответу приплюсовывается константа http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image016.gif.

**Решить интеграл – это значит найти определенную функцию http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image018.gif, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Еще раз посмотрим на запись:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image020.gif

Посмотрим в таблицу интегралов.

Что происходит? Левые части http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image022.gif у нас **превращаются** в другие функции: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image018_0000.gif.

Упростим наше определение.

**Решить неопределенный интеграл http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image022_0000.gif – это значит ПРЕВРАТИТЬ его в определенную функцию http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image014_0000.gif, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей**.

Возьмем, например, табличный интеграл http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image026.gif. Что произошло? http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image028.gif превратился в функцию http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image030.gif.

Как и в случае с производными, для того, чтобы научиться находить интегралы, не обязательно быть в курсе, [**что такое интеграл**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html), [**первообразная функция**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html) с теоретической точки зрения. Достаточно просто осуществлять превращения по некоторым формальным правилам. Так, в случае http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image026_0000.gif совсем не обязательно понимать, почему интегралhttp://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image028_0000.gif превращается именно в http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image030_0000.gif. Пока можно принять эту и другие формулы как данность. Все пользуются электричеством, но мало кто задумывается, как там по проводам бегают электроны.

**Так как дифференцирование и интегрирование – противоположные операции, то для любой первообразной, которая найдена правильно, справедливо следующее**:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image032.gif

Иными словами, **если продифференцировать правильный ответ, то обязательно должна получиться исходная подынтегральная функция**.

Вернемся к тому же табличному интегралу http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image026_0001.gif.

Убедимся в справедливости данной формулы. Берем производную от правой части:

http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image035.gif – исходная подынтегральная функция.

Вот, кстати, стало понятнее, почему к функции http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image012_0000.gif всегда приписывается константа http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image016_0000.gif. При дифференцировании константа всегда превращается в ноль.

**Решить неопределенный интеграл** – это значит найти **множество** всех первообразных, а не какую-то одну функцию. В рассматриваемом табличном примере http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image039.gif, http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image041.gif, http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image043.gif, http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image045.gif и т. д. – все эти функции являются решением интеграла http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image028_0001.gif. Решений бесконечно много, поэтому записывают коротко: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image047.gif

Таким образом, любой неопределенный интеграл достаточно легко проверить (в отличие от производных, где хорошую стопудовую проверку можно осуществить разве что с помощью математических программ). Это некоторая компенсация за большое количество интегралов разных видов.

Переходим к рассмотрению конкретных примеров. Начнем, как и при изучении производной,  
с двух правил интегрирования, которые также называют [***свойствами линейности***](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html)неопределенного интеграла:

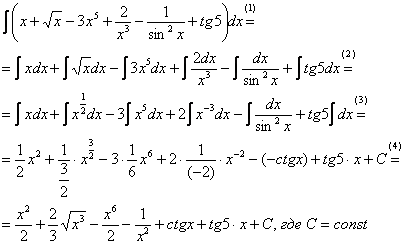
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image049.gif – постоянный множитель можно (и нужно) вынести за знак интеграла.

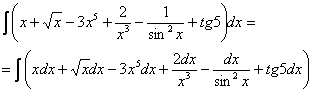
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image052.gif – интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от каждой функции в отдельности. Данное свойство справедливо для любого количества слагаемых.

Как видите, правила, в принципе, такие же, как и для производных.

Пример 1

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image054.gif

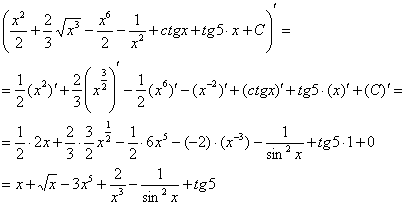
Решение: Удобнее переписать его на бумагу.  


(1) Применяем правило http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image052_0000.gif. Не забываем записать значок дифференциала http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008_0000.gif под каждым интегралом. Почему под каждым? **http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008_0001.gif – это полноценный множитель**, если расписывать решение совсем детально, то первый шаг следует записать так:  


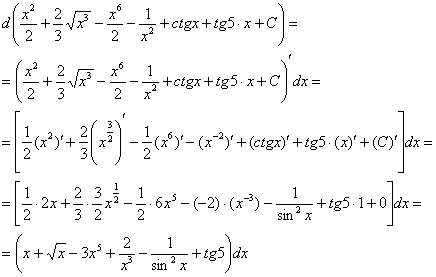
(2) Согласно правилу http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image049.gif, выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image061.gif – это константа, её также выносим.  
Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. **Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image063.gif. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх.**

**!** *Примечание: в отличие от производных, корни в интегралах далеко не всегда следует приводить к виду http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image063_0000.gif, а степени переносить вверх. Например, http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image065.gif – это готовый табличный интеграл, и всякие китайские хитрости вроде http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image067.gif совершенно не нужны. Аналогично:http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image069.gif – тоже табличный интеграл, нет никакого смысла представлять дробь  в виде http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image071.gif.  Внимательно изучите таблицу!*

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image073.gif, http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image075.gif и http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image077.gif.  
Особое внимание обращаю на формулу интегрирования степенной функции http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image079.gif, она встречается очень часто, ее лучше запомнить. Следует отметить, что табличный интеграл http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image077_0000.gif – частный случай этой же формулы: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image082.gif.  
**Константу http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image016_0002.gif достаточно приплюсовать один раз в конце выражения (а не ставить их после каждого интеграла)**.  
(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида **http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image063_0001.gif**снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – сбрасываем обратно в знаменатель

Проверка. Для того чтобы выполнить проверку нужно продифференцировать полученный ответ:  


Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно. От чего плясали, к тому и вернулись. Знаете, очень хорошо, когда история с интегралом заканчивается именно так.

Время от времени встречается немного другой подход к проверке неопределенного интеграла, от ответа берется не производная, а [**дифференциал**](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html):  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image087.gif  


Получено исходное **подынтегральное выражение**, значит, интеграл найден правильно.

Второй способ проверки мне нравится меньше, так как приходится дополнительно рисовать большие скобки и тащить значок дифференциала http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008_0003.gif до конца проверки. Хотя он корректнее или «солиднее» что ли.

На самом деле я вообще мог умолчать о втором способе проверки. Дело не в способе, а в том, что мы научились раскрывать дифференциал. Еще раз.

**Дифференциал раскрывается следующим образом**:

1) значок http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image089_0000.gif убираем;  
2) справа над скобкой ставим штрих (обозначение производной);  
3) в конце выражения приписываем множитель http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image008_0004.gif.

Например: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image095.gif

Запомните это. Рассмотренный приём потребуется нам очень скоро.

Пример 2

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image097.gif

Это пример для самостоятельно решения. Ответ и полное решение в конце урока.

**Когда мы находим неопределенный интеграл, то ВСЕГДА стараемся сделать проверку**, тем более, для этого есть прекрасная возможность. Далеко не все типы задач в высшей математике является подарком с этой точки зрения. Неважно, что часто в контрольных заданиях проверки не требуется, её никто, и ничто не мешает провести на черновике. Исключение можно сделать лишь тогда, когда не хватает времени (например, на зачете, экзамене). Лично я всегда проверяю интегралы, а отсутствие проверки считаю халтурой и некачественно выполненным заданием.

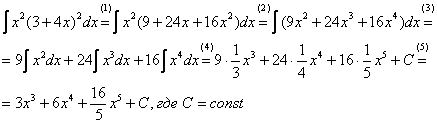
Пример 3

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image099.gif

Решение: Анализируя интеграл, мы видим, что у нас произведение двух функций, да еще и возведение в степень целого выражения. К сожалению, на поприще интегральной битвы нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image101.jpg, .

А поэтому, когда дано произведение или частное, всегда имеет смысл посмотреть, а нельзя ли преобразовать подынтегральную функцию в сумму?

Рассматриваемый пример – тот случай, когда можно. Сначала я приведу полное решение, комментарии будут ниже.



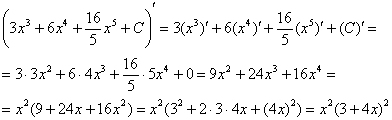
(1) Используем старую-добрую формулу квадрата суммы http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image107.gif, избавляясь от степени.

(2) Вносим http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image109.gif в скобку, избавляясь от произведения.

(3) Используем [**свойства линейности интеграла**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html) (оба правила сразу).

(4) Превращаем интегралы по табличной формуле http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image073_0000.gif.

(5) Упрощаем ответ. Здесь следует обратить внимание на обыкновенную неправильную дробь http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image111.gif – она несократима и в ответ входит именно в таком виде. Не нужно делить на калькуляторе http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image113.gif! Не нужно представлять ее в виде http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image115.gif!

Проверка:  


Получена исходная **подынтегральная функция**, значит, интеграл найден правильно.

В ходе проверки функцию всегда желательно «упаковать» до первоначального вида, вынося в данном случае http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image109_0000.gif за скобки и применяя формулу сокращенного умножения в обратном направлении: http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image119.gif

Пример 4

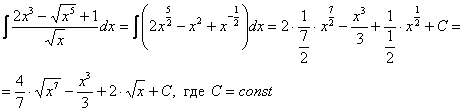
Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image121.gif

Это пример для самостоятельно решения. Ответ и полное решение в конце урока.

Пример 5

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image123.gif

В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. Когда мы видим в подынтегральном выражении дробь, то первой мыслью должен быть вопрос: А нельзя ли как-нибудь от этой дроби избавиться, или хотя бы её упростить?

Замечаем, что в знаменателе находится одинокий корень из «икс». Один в поле – не воин, а значит, можно почленно разделить числитель на знаменатель:  


Действия с дробными степенями я не комментирую, так как о них неоднократно шла речь в статьях о производной функции. Если Вас все-таки ставит в тупик такой пример, как http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image127.gif, и ни в какую не получается правильный ответ http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image129.gif, то рекомендую обратиться к школьным учебникам. В высшей математике дроби и действия с ними встречаются на каждом шагу.

Также обратите внимание, что в решении пропущен один шаг, а именно, применение правил http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image049.gif, http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image052_0001.gif. Обычно уже при начальном опыте решения интегралов данные свойства считают само собой разумеющимися и не расписывают подробно.

Пример 6

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.  
http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image131.gif

Это пример для самостоятельно решения. Ответ и полное решение в конце урока.

В общем случае с дробями в интегралах не всё так просто, дополнительный материал по интегрированию дробей некоторых видов можно найти в статье [**Интегрирование некоторых дробей**](http://www.mathprofi.ru/integrirovanie_drobei.html).

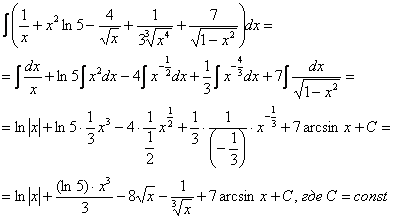
**!** Но, прежде чем перейти к вышеуказанной статье, необходимо ознакомиться с уроком [**Метод замены в неопределенном интеграле**](http://www.mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html). Дело в том, что подведение функции под дифференциал или метод замены переменной является **ключевым моментом** в изучении темы, поскольку встречается не только «в чистых заданиях на метод замены», но и во многих других разновидностях интегралов.

Очень хотелось включить еще несколько примеров в данный урок, но вот сижу сейчас, печатаю этот текст в Вёрде и замечаю, что статья уже выросла до приличных размеров.  
А поэтому вводный курс интегралов для чайников подошел к концу.

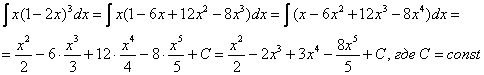
Желаю успехов!

Решения и ответы:

*Пример 2:****Решение****:*

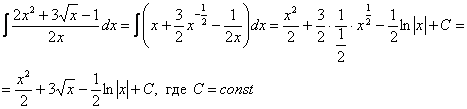
**

*Пример 4:****Решение****:*

**

*В данном примере мы использовали формулу сокращенного умножения http://www.mathprofi.ru/f/integraly_primery_reshenij_clip_image137.gif*

*Пример 6:****Решение****:*

**

Задания для решения

Текст задания  
Найти определенные интегралы методом непосредственного интегрирования

1. *dx*

2. *dx*

3. *dx*

4. *dx*

5.

6.

7.

8.

9.

10.