Задания для группы ПХ251 2.04, 6.04

Изучить и законспектировать теоретический материал, ответить на контрольные вопросы

**Тема 1.**

**События. Виды событий**

Одно из базовых понятий тервера уже озвучено выше – это ***событие***. События бывают ***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

**Достоверным** называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий)* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

**Невозможным** называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл».  В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

**Любой** результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События (любые) **обозначают** большими латинскими буквами  либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: . Исключение составляет буква , которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

 – в результате броска монеты выпадет «орёл»;
 – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;
 – из колоды будет извлечена карта трефовой масти *(по умолчанию колода считается полной)*.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Таким образом, при розыгрыше важного жребия всегда есть смысл невзначай посмотреть, а не одинаковы ли грани монеты ;-)

Другая важная характеристика событий – это их ***равновозможность***. Два или бОльшее количество событий называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например:

выпадение орла или решки при броске монеты;
выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;
извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **не равновозможными**? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён [**центр тяжести**](http://www.mathprofi.ru/primery_reshenij_proizvolnyh_troinyh_integralov.html), то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. События  – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

**Совместные и несовместные события. Противоположные события.
Полная группа событий**

События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий  является пара ***противоположных*** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

 – в результате броска монеты выпадет орёл;
 – в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;
 – в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события **несовместны** и **противоположны**.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

 – из колоды будет извлечена карта трефовой масти;
 – из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют ***полную группу событий***, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

 – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;
 – … 2 очка;
 – … 3 очка;
 – … 4 очка;
 – … 5 очков;
 – … 6 очков.

События  **несовместны** *(поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других)* **и образуют полную группу** *(так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий)*.

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это ***элементарность*** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события». Например, события  элементарны, но событие  не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события  (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события  (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

***Совместные*** события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появление другого. Например:

 – из колоды карт будет извлечена трефа;
 – из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

 – завтра в 12.00 будет дождь;
 – завтра в 12.00 будет гроза;
 – завтра в 12.00 будет солнце.

Ситуация, конечно, довольно редкая, но совместное появление всех трёх событий в принципе не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно, т.е. может быть только ливень с грозой или грибной дождик, или погромыхает неподалёку на фоне ясного неба.

**Алгебра событий**

**Операция сложения событий** означает [**логическую связку**](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html) **ИЛИ**,
а **операция умножения событий** – [**логическую связку**](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html) **И**.

1) **Суммой** двух событий  и  называется событие  которое состоит в том, что наступит **или** событие  **или** событие  **или** оба события одновременно. В том случае, если события **несовместны**, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие  **или** событие .

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие  состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий , а **если события несовместны** – **то одно и только одно** событие из этой суммы: **или** событие , **или** событие , **или** событие , **или** событие , **или** событие .

Примеров масса:

События  (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет **или** 1, **или** 2, **или** 3, **или** 4, **или** 6 очков.

Событие  (выпадет **не более** двух очков) состоит в том, что появится 1 **или** 2 **очка**.

Событие  (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет **или** 2 **или** 4 **или** 6 очков.

Событие  заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие  – в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие  состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или** семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то** – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие  состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;
– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);
– или все три события появятся одновременно.

То есть, событие  включает в себя 7 возможных исходов.

Второй столп алгебры событий:

2) **Произведением** двух событий  и  называют событие , которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение  означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие , **и** событие . Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение  подразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие , **и** событие , **и** событие , …, **и** событие .

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монетыи следующие события:

 – на 1-й монете выпадет орёл;
 – на 1-й монете выпадет решка;
 – на 2-й монете выпадет орёл;
 – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:
– событие  состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет орёл;
– событие  состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет решка;
– событие  состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й монете решка;
– событие  состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события  **несовместны** *(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)* и образуют **полную группу** *(поскольку учтены* ***все*** *возможные исходы броска двух монет)*. Давайте просуммируем данные события: . Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение – **ИЛИ**. Таким образом, сумму  легко прочитать понятным человеческим языком: «выпадут два орла **или** две решки **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й решка **или** на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда **в одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это ***повторные испытания***, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

 – в 1-м броске выпадет 4 очка;
 – во 2-м броске выпадет 5 очков;
 – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие  состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше [**комбинаций**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_po_kombinatorike_primery_reshenij.html) (исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

**Вероятность события**

***Вероятность события*** – это центральное понятие теории вероятностей. …Убийственно логичная вещь, но с чего-то надо было начинать =)  Существует несколько подходов к её определению:

***Классическое определение вероятности***;
[***Геометрическое определение вероятности***](http://www.mathprofi.ru/geometricheskoe_opredelenie_verojatnosti.html);
[***Статистическое определение вероятности***](http://www.mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html).

В данной статье я остановлюсь на классическом определении вероятностей, которое находит наиболее широкое применение в учебных заданиях.

**Обозначения**. Вероятность некоторого события  обозначается большой латинской буквой , а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

 –  вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
 – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
 – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква . В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий  и их вероятностей  в пользу следующей стилистики::

 – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;
 – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;
 – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Данный вариант популярен при решении практических задач, поскольку позволяет заметно сократить запись решения. Как и в первом случае, здесь удобно использовать «говорящие» подстрочные/надстрочные индексы.

Все уже давно догадались о числах, которые я только что записал выше, и сейчас мы узнаем, как они получились:

**Классическое определение вероятности:**

Вероятностью наступления события  в некотором испытании называют отношение , где:

 – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий;

 – количество элементарных исходов, ***благоприятствующих*** событию .

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют полную группу, таким образом, общее число исходов ; при этом, каждый из них элементарен и равновозможен.  Событию  благоприятствует  исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: .

Аналогично – в результате броска кубика может появиться  элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию  благоприятствует единственный  исход (выпадение пятёрки). Поэтому: .

Особое внимание обращаю на третий пример. Здесь будет некорректным сказать *«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы »*. В определении речь идёт об элементарных исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт *(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу)*, из них 9 карт трефовой масти *(кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию )*; по классическому определению вероятности: . Именно так!

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна , выпадения пятёрки , извлечения трефы , но в теории вероятностей **ЭТОГО ДЕЛАТЬ НЕ ПРИНЯТО** (хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

**Принято использовать доли единицы**, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах . При этом если , то событие  является *невозможным*, если  – *достоверным*, а если , то речь идёт о *случайном* событии.

**! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!**

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

 – из урны будет извлечён красный шар;
 – из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: . Событию  благоприятствуют все возможные исходы , следовательно, , то есть данное событие *достоверно*. Для 2-го же события благоприятствующие исходы

Пожалуй, пока достаточно, на уроке [**Задачи на классическое определение вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html) мы выжмем максимум из формулы . В заключительной же части этой статьи рассмотрим одну важную теорему:

**Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице**. Грубо говоря, если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

 – в результате броска монеты выпадет орёл;
 – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: 

Совершенно понятно, что данные события равновозможны и их вероятности одинаковы .

По причине равенства вероятностей равновозможные события часто называют ***равновероятными***. А вот и скороговорка на определение степени опьянения получилась =)

Пример с кубиком: события  противоположны, поэтому .

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность  того, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет:



Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов. Для элементарных исходов, к слову, данная теорема тоже справедлива:


События , как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна :


Ну и на закуску колода: поскольку нам известна вероятность  того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти:


Заметьте, что рассмотренные пары событий  и  не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой . Например, если  – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то  – вероятность того, что он промахнётся.

**!** В теории вероятностей буквы  и  нежелательно использовать в каких-то других целях.

очень важно, чтобы вы могли ответить на следующие вопросы:

– Какие виды событий существуют?
– Что такое случайность и равновозможность события?
– Как вы понимаете термины совместность/несовместность событий?
– Что такое полная группа событий, противоположные события?
– Что означает сложение и умножение событий?
– В чём суть классического определения вероятности?
– Чем полезна теорема сложения вероятностей событий, образующих полную группу?

Тема 2.

Элементы комбинаторики

В узком смысле комбинаторика – это подсчёт различных комбинаций, которые можно составить из некоторого множества *дискретных* объектов. Под объектами понимаются какие-либо обособленные предметы или живые существа – люди, звери, грибы, растения, насекомые и т.д. При этом комбинаторику совершенно не волнует, что множество состоит из тарелки манной каши, паяльника и болотной лягушки. Принципиально важно, что эти объекты поддаются перечислению – их три *(дискретность)* и существенно то, что среди них нет одинаковых.

С множеством разобрались, теперь о комбинациях. Самыми распространёнными видами комбинаций являются перестановки объектов, их выборка из множества (сочетание) и распределение (размещение). Давайте прямо сейчас посмотрим, как это происходит:

**Перестановки, сочетания и размещения без повторений**

Не пугайтесь малопонятных терминов, тем более, некоторые из них действительно не очень удачны. Начнём с хвоста заголовка – что значит «**без повторений**»? Это значит, что в данном параграфе будут рассматриваться множества, которые состоят из **различных** объектов. Например, … нет, кашу с паяльником и лягушкой предлагать не буду, лучше что-нибудь повкуснее =) Представьте, что перед вами на столе материализовалось яблоко, груша и банан (при наличии таковых ситуацию можно смоделировать и реально). Выкладываем фрукты слева направо в следующем порядке:

яблоко / груша / банан

Вопрос первый: сколькими способами их можно переставить?

Одна комбинация уже записана выше и с остальными проблем не возникает:

яблоко / банан / груша
груша / яблоко / банан
груша / банан / яблоко
банан / яблоко / груша
банан / груша / яблоко

**Итого**: 6 комбинаций или 6 **перестановок**.

Хорошо, здесь не составило особого труда перечислить все возможные случаи, но как быть, если предметов больше?  Уже с четырьмя различными фруктами количество комбинаций значительно возрастёт!

Пожалуйста, откройте справочный материал [**Основные формулы комбинаторики**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf) *(методичку удобно распечатать)* и в пункте № 2 найдите формулу количества перестановок.

Никаких мучений – 3 объекта можно переставить  способами.

Вопрос второй: сколькими способами можно выбрать а) один фрукт, б) два фрукта, в) три фрукта, г) хотя бы один фрукт?

Зачем выбирать? Так нагуляли же аппетит в предыдущем пункте – для того, чтобы съесть! =)

а) Один фрукт можно выбрать, очевидно, тремя способами – взять либо яблоко, либо грушу, либо банан. Формальный подсчёт проводится по [**формуле количества сочетаний**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf):


Запись  в данном случае следует понимать так: «сколькими способами можно выбрать 1 фрукт из трёх?»

б) Перечислим все возможные сочетания двух фруктов:

яблоко и груша;
яблоко и банан;
груша и банан.

Количество комбинаций легко проверить по той же формуле:


Запись  понимается аналогично: «сколькими способами можно выбрать 2 фрукта из трёх?».

в) И, наконец, три фрукта можно выбрать единственным способом:


Кстати, формула количества сочетаний сохраняет смысл и для пустой выборки:
 способом можно выбрать ни одного фрукта – собственно, ничего не взять и всё.

г) Сколькими способами можно взять **хотя бы один** фрукт? Условие «хотя бы один» подразумевает, что нас устраивает 1 фрукт (любой) или 2 любых фрукта или все 3 фрукта:
 способами можно выбрать хотя бы один фрукт.

Читатели, внимательно изучившие вводный урок по [**теории вероятностей**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), уже кое о чём догадались. Но о смысле знака «плюс» позже.

Для ответа на следующий вопрос мне требуется два добровольца… …Ну что же, раз никто не хочет, тогда буду вызывать к доске =)

Вопрос третий: сколькими способами можно раздать по одному фрукту Даше и Наташе?

Для того чтобы раздать два фрукта, сначала нужно их выбрать. Согласно пункту «бэ» предыдущего вопроса, сделать это можно  способами, перепишу их заново:

яблоко и груша;
яблоко и банан;
груша и банан.

Но комбинаций сейчас будет в два раза больше. Рассмотрим, например, первую пару фруктов:
яблоком можно угостить Дашу, а грушей – Наташу;
либо наоборот – груша достанется Даше, а  яблоко – Наташе.

И такая перестановка возможна для каждой пары фруктов.

В данном случае работает [**формула количества размещений**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf):


Она отличается от формулы  тем, что учитывает **не только** количество способов, которым можно выбрать несколько объектов, но и все перестановки объектов **в каждой** возможной выборке. Так, в рассмотренном примере, важно не только то, что можно просто выбрать, например, грушу и банан, но и то, как они будут распределены (размещены) между Дашей и Наташей.

Пожалуйста, внимательно прочитайте пункт № 2 методички [**Основные формулы комбинаторики**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf) и постарайтесь хорошо уяснить разницу между перестановками, сочетаниями и размещениями. В простейших случаях можно пересчитать все возможные комбинации вручную, но чаще всего это становится неподъемной задачей, именно поэтому и нужно понимать смысл формул.

Также напоминаю, что сейчас речь идёт о множестве с **различными** объектами, и если яблоко/грушу/банан заменить на 3 яблока или даже на 3 очень похожих яблока, то в контексте рассмотренной задачи они всё равно будут считаться **различными**.

Остановимся на каждом виде комбинаций подробнее:

**Перестановки**

***Перестановками*** называют комбинации, состоящие из одних и тех же  **различных** объектов и отличающиеся только порядком их расположения. Количество всех возможных перестановок выражается формулой 

Отличительной особенностью перестановок является то, что в каждой из них участвует **ВСЁ** множество, то есть, **все**  объектов. Например, дружная семья:

Задача 1

Сколькими способами можно рассадить 5 человек за столом?

**Решение**: используем формулу количества перестановок:



**Ответ**: 120 способами

Невероятно, но факт. Обратите внимание, что здесь не имеет значения круглый ли стол, квадратный, или вообще все люди сели ~~встали, легли~~ на скамейку вдоль одной стены – важно лишь количество объектов и их взаимное расположение. Помимо перестановок людей, часто встречается задача о перестановках различных книг на полке, но это было бы слишком просто даже для чайника:

Задача 2

Сколько четырёхзначных чисел можно составить из четырёх карточек с цифрами 0, 5, 7, 9?

Для того чтобы составить четырёхзначное число нужно задействовать **все** четыре карточки *(цифры на которых* ***различны!****)*, и это очень важная предпосылка для применения формулы  Очевидно, что, переставляя карточки, мы будем получать различные четырёхзначные числа, … стоп, а всё ли тут в порядке? ;-)

Хорошенько подумайте над задачей! Вообще, это характерная черта комбинаторных и вероятностных задач – в них НУЖНО ДУМАТЬ. И зачастую думать по-житейски, как, например, в разборе вступительного примера с фруктами. Нет, конечно, я не призываю тупо прорабатывать другие разделы математики, однако должен заметить, что те же [**интегралы**](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html) можно [**научиться решать**](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html) чисто механически.

Решение и ответ в конце урока.

Увеличиваем обороты:

**Сочетания**

В учебниках обычно даётся лаконичное и не очень понятное определение сочетаний, поэтому, в моих устах формулировка будет не особо рациональной, но, надеюсь, доходчивой:

***Сочетаниями*** называют различные комбинации из  объектов, которые выбраны из множества  различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из элементов, в которой не важен их порядок (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле .

Задача 3

В ящике находится 15 деталей. Сколькими способами можно взять 4 детали?

**Решение**: прежде всего, снова обращаю внимание на то, что по логике условия, детали считаются **различными** – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы  *(в этом случае их можно, например, пронумеровать)*.

В задаче речь идёт о выборке из 4 деталей, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба» – грубо говоря, «просто выбрали 4 штуки и всё». Таким образом, у нас имеют место сочетания деталей. Считаем их количество:



Здесь, конечно же, не нужно ворочать огромные числа .
В похожей ситуации я советую использовать следующий приём: в знаменателе выбираем наибольший [**факториал**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf) (в данном случае ) и сокращаем на него дробь. Для этого числитель следует представить в виде . Распишу очень подробно:

 способами можно взять 4 детали из ящика.

Ещё раз: что это значит? Это значит, что из набора 15 различных деталей можно составить *одну тысячу триста шестьдесят пять* **уникальных** сочетания 4 деталей. То есть, каждая такая комбинация из четырёх деталей будет отличаться от других комбинаций хотя бы одной деталью.

**Ответ**: 1365 способами

Формуле  необходимо уделить самое пристальное внимание, поскольку она является «хитом» комбинаторики. При этом полезно ПОНИМАТЬ и без всяких вычислений записывать «крайние» значения: . Применительно к разобранной задаче:

 – единственным способом можно не выбрать ни одной детали;
 способами можно взять 1 деталь (любую из пятнадцати);
 способами можно взять 14 деталей (при этом какая-то одна из 15 останется в ящике);
 – единственным способом можно взять все пятнадцать деталей.

Рекомендую внимательно ознакомиться с [**биномом Ньютона и треугольником Паскаля**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf), по которому, к слову, очень удобно выполнять проверку вычислений  при небольших значениях «эн».

Задача 4

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 3 карты?

Это пример для самостоятельного решения. Чем приятны многие комбинаторные задачи, так это краткостью – главное, разобраться в сути. И суть, бывает, открывается с различных сторон. Разберём весьма поучительный пример:

Задача 4\*

В шахматном турнире участвует  человек и каждый с каждым играет по одной партии. Сколько всего партий сыграно в турнире?

Поскольку я сам играю в шахматы и неоднократно принимал участие в круговых турнирах, то сразу же сориентировался по турнирной таблице размером  клеток, в которой результат каждой партии учитывается дважды и, кроме того, затушёвываются клетки «главной диагонали» *(т.к. участники не играют сами с собой)*. Исходя из проведённых рассуждений, общее количество сыгранных партий рассчитывается по формуле . Такое решение полностью корректно *(см. соответствующий файл* [***банка готовых решений***](http://www.mathprofi.ru/skachat_primery_po_vysshei_matematike.html)*)* и на долгое время я забыл о нём по принципу «решено, да и ладно».

Однако один из посетителей сайта заметил, что на самом деле здесь можно руководствоваться самыми что ни на есть банальными сочетаниями:
 различных пар можно составить из  соперников *(кто играет белыми, кто чёрными – не важно)*.

Эквивалентной является задача о рукопожатиях: в отделе работает  мужчин и каждый с каждым здоровается за руку, сколько рукопожатий они совершают? К слову, шахматисты тоже пожимают друг другу руку перед каждой партией.

Ну а вывода тут два:
– во-первых, не всё очевидное – очевидно;
– и во-вторых, не бойтесь решать задачи «нестандартно»!

Большое спасибо за ваши письма, они помогают улучшить качество учебных материалов!

**Размещения**

Или «продвинутые» сочетания. ***Размещениями*** называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества  различных объектов, и которые отличаются друг от друга как составом объектов в выборке, так и их порядком. Количество размещений рассчитывается по формуле 

Что наша жизнь? Игра:

Задача 5

Боря, Дима и Володя сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? *(колода содержит 36 карт)*

**Решение**: ситуация похожа на Задачу 4, но отличается тем, что здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из колоды, но и то, КАК они будут распределены между игроками. По формуле размещений:

 способами можно раздать 3 карты игрокам.

Есть и другая схема решения, которая, с моей точки зрения, даже понятнее:

 способами можно извлечь 3 карты из колоды.

Теперь давайте рассмотрим, какую-нибудь одну *из семи тысяч ста сорока* комбинаций, например: король пик, 9 червей , 7 червей. Выражаясь комбинаторной терминологией, эти 3 карты можно «переставить» между Борей, Димой и Володей  способами:

КП, 9Ч, 7Ч;
КП, 7Ч, 9Ч;
9Ч, КП, 7Ч;
9Ч, 7Ч, КП;
7Ч, КП, 9Ч;
7Ч, 9Ч, КП.

И аналогичный факт справедлив **для любого** уникального набора из трёх карт. А таких наборов, не забываем, мы насчитали . Не нужно быть профессором, чтобы понять, что найденное количество сочетаний следует умножить на шесть:

 способами можно сдать по одной карте трём игрокам.

По существу, получилась наглядная проверка [**формулы**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf) , окончательный смысл которой мы проясним в следующем параграфе.

**Ответ**: 42840

Возможно, у вас остался вопрос, а кто же раздавал карты? …Наверное, преподаватель =)
И чтобы никому не было обидно, в следующей задаче примет участие вся студенческая группа:

Задача 6

В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Задача о «размещении» должностей в коллективе встречается очень часто и является самым настоящим баяном. Краткое решение и ответ в конце урока.

**Правило сложения и правило умножения комбинаций**

Данные правила весьма напоминают [**алгебру событий**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), и многие читатели уже ознакомились с пунктом  № 4 справочного материала [**Основные формулы комбинаторики**](http://www.mathprofi.ru/formuly_kombinatoriki.pdf), где они изложены в общем виде. Постараюсь повторить принципы максимально кратко:

1) Знак «плюс» следует понимать и читать как союз [**ИЛИ**](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html). Вспоминаем демонстрационную задачу с яблоком, грушей и бананом:

 способами можно выбрать хотя бы один фрукт.

То есть, можно взять 1 фрукт (любой из трёх) **ИЛИ** какое-нибудь сочетание двух фруктов **ИЛИ** все три фрукта. Заметьте, что сложение комбинаций предполагает безразличие выбора *(без разницы будет ли выбран один, два или 3 фрукта)*.

Рассмотрим более основательный пример:

Задача 7

Студенческая группа состоит из 23 человек, среди которых 10 юношей и 13 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?

**Решение**: в данном случае подсчёт не годится, поскольку общее количество сочетаний включает в себя и разнополые пары.

Условие «выбрать двух человек одного пола» подразумевает, что необходимо выбрать двух юношей **или** двух девушек, и уже сама словесная формулировка указывает на верный путь решения:

 способами можно выбрать 2 юношей;
 способами можно выбрать 2 девушек.

Таким образом, двух человек одного пола (без разницы – юношей **или** девушек) можно выбрать:  способами.

**Ответ**: 123

Правило умножения комбинаций:

2) Знак «умножить» следует понимать и читать как союз [**И**](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html).

Рассмотрим ту же студенческую группу, которая пошла на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

 способами можно выбрать 1 юношу;
 способами можно выбрать 1 девушку.

Таким образом, одного юношу **и** одну девушку можно выбрать:  способами.

Когда из каждого множества выбирается по 1 объекту, то справедлив следующий принцип подсчёта комбинаций: «**каждый** объект из одного множества может составить пару **с каждым** объектом другого множества».

То есть, Олег может пригласить на танец любую из 13 девушек, Евгений – тоже любую из тринадцати, и аналогичный выбор есть у остальных молодых людей. Итого:  возможных пар.

Следует отметить, что в данном примере не имеет значения «история» образования пары; однако если принять во внимание инициативу, то количество комбинаций нужно удвоить, поскольку каждая из 13 девушек тоже может пригласить на танец любого юношу. Всё зависит от условия той или иной задачи!

Похожий принцип справедлив и для более сложных комбинаций, например: сколькими способами можно выбрать двух юношей **и** двух девушек для участия в сценке КВН?

Союз **И** недвусмысленно намекает, что комбинации необходимо перемножить:

 возможных групп артистов.

Иными словами, **каждая** пара юношей (45 уникальных пар) может выступать с **любой** парой девушек (78 уникальных пар). А если рассмотреть распределение ролей между участниками, то комбинаций будет ещё больше. …Очень хочется, но всё-таки воздержусь от продолжения, чтобы не привить вам отвращение к студенческой жизни =).

Правило умножения комбинаций распространяется и на бОльшее количество множителей:

Задача 8

Сколько существует трёхзначных чисел, которые делятся на 5?

**Решение**: для наглядности обозначим данное число тремя звёздочками: **\*\*\***

Комбинации будем считать по разрядам – *слева направо*:

В *разряд сотен* можно записать любую из  цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9).  Ноль не годится, так как в этом случае число перестаёт быть трёхзначным.

А вот в *разряд десятков* («посерединке») можно выбрать любую из 10 цифр: .

По условию, число должно делиться на 5. Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 либо на 0. Таким образом, в младшем разряде нас устраивают 2 цифры.

**Итого, существует**:  трёхзначных чисел, которые делятся на 5.

При этом произведение  расшифровывается так: «9 способами можно выбрать цифру в *разряд сотен* **и** 10 способами выбрать цифру в *разряд десятков* **и** 2 способами в *разряд единиц*»

Или ещё проще: «**каждая** из 9 цифр в *разряде сотен* комбинируется **с каждой** из 10 цифр *разряда десятков* **и с каждой** из двух цифр в *разряде единиц*».

**Ответ**: 180

А теперь…

Да, чуть не забыл об обещанном комментарии к задаче № 5, в которой Боре, Диме и Володе можно сдать по одной карте  способами. Умножение здесь имеет тот же смысл:  способами можно извлечь 3 карты из колоды **И** **в каждой** выборке переставить их  способами.

А теперь задача для самостоятельного решения… сейчас придумаю что-нибудь поинтереснее, …пусть будет про ту же русскую версию блэкджека:

Задача 9

Сколько существует выигрышных комбинаций из 2 карт при игре в «очко»?

Для тех, кто не знает: выигрывает комбинация 10 + ТУЗ (11 очков) = 21 очко и, давайте будем считать выигрышной комбинацию из двух тузов.

*(порядок карт в любой паре не имеет значения)*

Краткое решение и ответ в конце урока.

Кстати, не надо считать пример примитивным. Блэкджек – это чуть ли не единственная игра, для которой существует математически обоснованный алгоритм, позволяющий выигрывать у казино. Желающие могут легко найти массу информации об оптимальной стратегии и тактике. Правда, такие мастера довольно быстро попадают в чёрный список всех заведений =)

Пришло время закрепить пройденный материал парой солидных задач:

Задача 10

У Васи дома живут 4 кота.

а) сколькими способами можно рассадить котов по углам комнаты?
б) сколькими способами можно отпустить гулять котов?
в) сколькими способами Вася может взять на руки двух котов (одного на левую, другого – на правую)?

**Решаем**: во-первых, вновь следует обратить внимание на то, что в задаче речь идёт о **разных** объектах (даже если коты – однояйцовые близнецы). Это очень важное условие!

а) ~~Молчание котов~~. Данной экзекуции подвергаются **сразу все коты**
+ важно их расположение, поэтому здесь имеют место перестановки:
 способами можно рассадить котов по углам комнаты.

Повторюсь, что при перестановках имеет значение лишь количество различных объектов и их взаимное расположение. В зависимости от настроения Вася может рассаживать животных полукругом на диване, в ряд на подоконнике и т.д. – перестановок во всех случаях будет 24. Желающие могут для удобства представить, что коты разноцветные (например, белый, чёрный, рыжий и полосатый) и перечислить все возможные комбинации.

б) Сколькими способами можно отпустить гулять котов?

Предполагается, что коты ходят гулять только через дверь, при этом вопрос подразумевает безразличие по поводу количества животных – на прогулку могут выйти 1, 2, 3 или все 4 кота.

Считаем все возможные комбинации:

 способами  можно отпустить гулять одного кота (любого из четырёх);
 способами  можно отпустить гулять двух котов (варианты перечислите самостоятельно);
 способами  можно отпустить гулять трёх котов (какой-то один из четырёх сидит дома);
 способом  можно выпустить всех котов.

Наверное, вы догадались, что полученные значения следует просуммировать:
 способами можно отпустить гулять котов.

Энтузиастам предлагаю усложнённую версию задачи – когда любой кот в любой выборке случайным образом может выйти на улицу, как через дверь, так и через окно ~~10 этажа~~. Комбинаций заметно прибавится!

в) Сколькими способами Вася может взять на руки двух котов?

Ситуация предполагает не только выбор 2 животных, но и их размещение по рукам:
 способами можно взять на руки 2 котов.

Второй вариант решения:  способами можно выбрать двух котов **и**  способами посадить **каждую** пару на руки: 

**Ответ**: а) 24, б) 15, в) 12

Ну и для очистки совести что-нибудь поконкретнее на умножение комбинаций…. Пусть у Васи дополнительно живёт 5 кошек =) Сколькими способами можно отпустить гулять 2 котов **и** 1 кошку?



То есть, с **каждой** парой котов можно выпустить **каждую** кошку.