**Задание для студентов второго курса ОП251 и ОП151**

Необходимо написать конспект темы, выполнить практическую работу, письменно ответить на контрольные вопросы.

**1. Основные понятия и определения**

Граф (от греческого https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image169.gif - пишу) - непустое множество *вершин https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image170.gif* и набор *https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image171.gif* неупорядоченных и упорядоченных пар вершин вида (*v*,*w*). Обычно граф обозначают как *G*(*V*,*E*); количество вершин и ребер обозначается, соответственно, *n*(*G*) и *m*(*G*).

Неупорядоченная пара вершин называется *ребром* {*v*,*w*}, упорядоченная пара - *дугой* (*v*,*w*).

Граф, содержащий только ребра, называется неориентированным (обозначается *G*). Граф, содержащий только дуги - ориентированным (или орграфом) (обозначается https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image172.gif).

Пара вершин может быть соединена двумя или более рёбрами (или, соответственно, дугами одного направления), такие рёбра (или дуги) называются *кратными*. Дуга (или ребро) может начинаться и заканчиваться в одной и той же вершине, в этом случае соответствующая дуга (или ребро) называется *петлёй*.

Граф без кратных рёбер и петель называется *простым графом*.

Граф, все *n* вершин которого являются изолированными, называется *нулевым* (*пустым*) и обозначается *https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image173.gif*.

Простой граф, любые две вершины которого являются смежными, называется *полным*. Полный граф с *n* вершинами обозначается *https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image174.gif*.

**2. Смежность, инцидентность, степени**

Вершины, соединённые ребром или дугой, называются *смежными*.

Рёбра, имеющие общую вершину, тоже называются *смежными*.

Ребро (или дуга) и любая из его вершин называются *инцидентными*.

Говорят, что ребро {*v*,*w*} *соединяет* вершины *v* и *w*. Для орграфов: дуга (*v*,*w*) *начинается* в вершине *v* (*исходит* из вершины *v*) и *заканчивается* в вершине *w* (*заходит* в вершину *w*), или *идет* из вершины *v* в вершину *w*.

*Степенью вершины* *v* графа *G* называется число deg*v* рёбер графа *G*, инцидентных вершине *v*, при этом петли учитываются дважды. Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а степень 1 - *тупиковой*(висячей, концевой).

***Теорема***. (Теорема о рукопожатиях) Сумма степеней всех вершин графа *G* равна удвоенному числу его рёбер, то есть: https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image177.gif. (Число пожатых рук всегда четно.)

Для орграфа: https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image178.gif.

Доказательство следует из тех соображений, что каждое ребро вносит в сумму вклад 2.

***Следствие***. В каждом графе число вершин нечётной степени чётно.

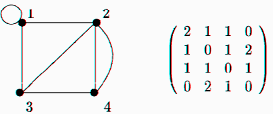
**3.3. Способы задания графов**

* Рисунок.
* Список вершин и рёбер.
* Матрица смежности. Матрицей смежности называется квадратная матрица *A*(*G*)=(https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image179.gif), (*i*,*j*=1,…,*n*), у которой элемент https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image179.gif равен числу рёбер, соединяющих https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image180.gif и https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image181.gif

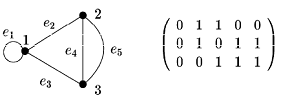
Для орграфа элемент матрицы *A*(https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image172.gif), https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image179.gif равен числу дуг, идущих из https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image180.gif в https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image181.gif.

* Матрица инцидентности. Матрицей инцидентности графа *G* (без петель) называется матрица *B*(*G*)=(https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image182.gif) (для орграфа *B*(https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image183.gif)=(https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image182.gif)) размерности https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image184.gif , у которой:  
  https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image182.gif=1, если вершина https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image180.gif инцидентна ребру https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image185.gif,  
  https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image182.gif=0, в противном случае.

Примеры:



Граф и его матрица смежности.



Граф и его матрица инцидентности, здесь вершинам соответствуют строки, а ребрам - столбцы.

**4. Подграфы. Операции на графах**

*Подграфом* графа *G*(*V,E*) называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер исходного графа *G*(*V,E*).

Определим некоторые операции на графах.

*Удаление* или *добавление ребра*.

*Удаление вершины*. Из множества вершин удаляем выбранную вершину, а из множества ребер все инцидентные ей ребра.

*Стягивание ребра*. Отождествляем (стягиваем) вершины инцидентные выбранному ребру.

*Добавление вершины* (разбиение ребра). Выберем некоторое ребро (*u*,*v*) из множества ребер и удалим его. В множество вершин добавим новую вершину *w*, а в множество ребер новые ребра (*u*,*w*) и (*w*,*v*).

*Объединение графов*. Объединением графов https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image189.gif и https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image190.gif называется граф https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image191.gif.

*Пересечение графов*. Пересечением графов https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image189.gif и https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image190.gif (https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image192.gif) называется граф https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image193.gif.

**5. Связность. Компоненты связности. Маршруты и пути**

*Маршрут* в графе - это последовательность вершин и рёбер *https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image194.gif*, где любые два "соседа" инцидентны. Рёбра и вершины в маршруте могут повторяться. Если начальная и конечная вершины совпадают, то маршрут называется *замкнутым*. Если все вершины и рёбра маршрута различны, то он называется *цепью*. Замкнутая цепь - это *цикл*. *Длина маршрута* равна числу входящих в него рёбер.

Граф *G*(*V*,*E*) называется *связным*, если для любых его вершин существует соединяющий их маршрут. *Компонентой связности* называется максимальный связный подграф графа *G*(*V*,*E*). Число компонент связности графа обозначается *k*(*G*).

Если для любых двух вершин *u* и *v* графа *G*(*V*,https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image195.gif) существует маршрут из *u* в *v*или из *v* в *u*, то граф называется *связным* или *односторонне связным*.

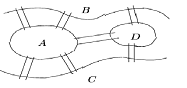
**6. Эйлеровы и гамильтоновы графы**

Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он проходит через каждое ребро графа ровно один раз. Граф называется *эйлеровым*, если в нем есть эйлеров цикл.

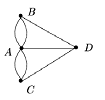
**Теорема.**Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда граф связный и все вершины имеют четную степень.

Свое название эйлеровы графы получили в честь Л.Эйлера, который первым рассмотрел такие графы в 1736 году в своей знаменитой работе о кенигсбергских мостах. Этой работой Эйлер, по существу, положил начало новому разделу математики - теории графов.

Задача о кенигсбергских мостах состояла в следующем. На реке Прегель в Кенигсберге было два острова, соединенных между собой и с берегами семью мостами, как показано на рисунке:



Спрашивается, можно ли, начиная с некоторого места суши, обойти все мосты ровно по одному разу и вернуться в начальную точку? Эйлер предложил рассмотреть следующий граф:



Нетрудно догадаться, что решение этой задачи сводится к поиску эйлеровой цепи в данном графе. Однако, как показывает приведенная теорема, в указанном графе нет эйлеровых цепей.

Отметим, что придумано еще много других развлекательных и полезных задач, связанных с поиском гамильтоновых циклов. Сформулируем две из них:

**7. Деревья и леса**

Связный граф без циклов называется *деревом*.

Граф без циклов называется *лесом*.

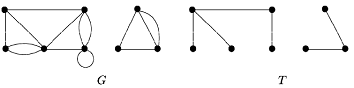
***Теорема.*** *T*(*V*,*E*) - *дерево тогда и только тогда, когда* *T*(*V*,*E*) - *связный граф и* |*E*|=|*V*| - 1.

***Теорема.*** *В любом дереве имеется не менее двух висячих вершин*.

**3.8. Цикломатическое число графа. Построение остовного дерева связного графа.**

*Остовным деревом* связного графа *G*(*V*,*E*) называется любой его подграф, содержащий все вершины *G*и являющийся деревом.

На рисунке приведены два графа *G* и по одному из их остовных деревьев *T*.



Число ребер, которое необходимо удалить для получения остова, называется *цикломатическим числом* графа *G*и обозначается https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image199.gif.

***Теорема.****Цикломатическое числом* *графа G*(*V*,*E*) *не зависит от последовательности удаления ребер и имеет место формула:*

https://siblec.ru/img/27/im_lex3/Image199.gif= |*E*|| - |*V|+k*(*G*),

*где* *k*(*G*) - *число компонент связности.*

**Практическая работа 8**

**Построение графов по условию ситуационных задач.**

Цель работы. Закрепить знание основных понятий теории графов, научиться применять знания при решении задач.

**Задача** 1 Граф задан матрицей смежности. Постройте его рисунок, определите степени вершин графа и найдите маршрут длины 5.

Вариант 1.

Вариант 2

Вариант 3.

Вариант 4.

Вариант 5.

Вариант 6.

**Задача 2**

Граф G задан диаграммой 1) Составьте для него матрицу смежности

2) Постройте матрицу инцидентности 3) Укажите степени вершин графа

1) 2) 3) 4)

5) 6)  
  
  
  
  
  
  
  
**Задача 3**Атос поскакал в гости к Партосу, взяв с собой карту. Числа на рисунке обозначают время движения (в часах) от пункта до пункта. Помогите Атосу найти кратчайший путь от своего поместья в пункте Е до поместья Портоса в пункте Д. Перечислите пункты, через которые должен проехать Атос, и подсчитайте время, которое должен он затратит на весь путь.

**Задача 4** Пусть граф задан матрицей смежности. Постройте изображение этого графа, укажите степени вершин графа. По матрице смежности постройте матрицу инцидентности оттого графа.

1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
| V1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| V2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| V3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| V4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

2.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
| V1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| V2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| V3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| V4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| V5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| V6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

3.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
| V1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| V2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| V3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| V5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

4.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
| V1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| V3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| V4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| V5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| V6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

5.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
| V1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| V2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| V3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| V5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

6.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V1 | V2 | V3 | V4 | V5 | V6 |
| V1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| V2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| V3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| V4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| V5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| V6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 |

Далее приведены варианты

ОП252

1. Белов 1

2. Андреев 2

3 Варакина 3

4 Гогошин 4

5. Гришина 5

6 Давиденко 6

7 Земляков 1

8 Климушина 2

9. Козлова 3

10. Коротеева 4

11 Кутенкова 5

12. Лопатина 6

13. Пикалова 1

14. Рыбина 2

15 Щербакова 3

16. Юрчиков 4

ОП 251

1. Будина 1

2. Ермилова 2

3. Зайцева 3

4. Ковалёва 4

5. Королинский 5

6. Леонов 6

7 Кривошей 1

8. Михеева 2

9. Морокуев 3

10. Некрасова 4

11. Палёнова 5

12. Петухова 6

13. Проскурин 1

14. Рай 2

15. Федотов 3

16. Юдин 4.

Практические писать на двойных листах, сдавать обязательно

За апрель должны были сданы практические

9 Применение дифференциальных уравнений к решению прикладных задач

10. Исследование числовых рядов на сходимость

11 Ряды Фурье

За май должны быть сданы практические работы

12 Применение графов

13 Элементы комбинаторики

14. Применение теории вероятностей к решению прикладных задач

15 . Числовые характеристики случайной величины

Остальное в июне, кроме того все должны сдать дифференцированный зачёт.