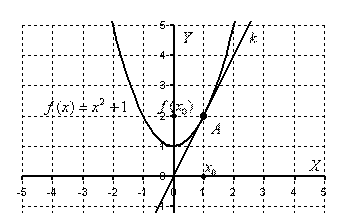
**Тема 7 Уравнение касательной к графику функции**

Рассмотрим задачу нахождения касательной к [**графику функции**](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) в данной точке. Это задание встречалось нам в школе, и оно же встречается в курсе высшей математики.

Рассмотрим «демонстрационный» простейший пример.

Составить уравнение касательной к графику функции http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image034.gif в точке с абсциссой http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image036.gif. Я сразу приведу готовое графическое решение задачи (на практике этого делать в большинстве случаев не надо):



Строгое определение касательной даётся с помощью [**определения производной функции**](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html), но пока мы освоим техническую часть вопроса. Наверняка практически всем интуитивно понятно, что такое касательная. Если объяснять «на пальцах», то касательная к графику функции – это [**прямая**](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html), которая касается графика функции в **единственной** точке. При этом все близлежащие точки прямой расположены максимально близко к графику функции.

Применительно к нашему случаю: при http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image036_0000.gif касательная http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image041.gif (стандартное обозначение) касается графика функции в единственной точке http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image043.gif.

И наша задача состоит в том, чтобы найти уравнение прямой http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image041_0000.gif.

**Как составить уравнение касательной в точке с абсциссой http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image045.gif?**

Общая формула знакома нам еще со школы:

http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image047.gif

Значение http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image036_0001.gif нам уже дано в условии.

Теперь нужно вычислить, чему равна **сама функция** в точке http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image036_0002.gif:  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image050.gif

На следующем этапе находим производную:  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image052.gif

Находим производную в точке (задание, которое мы недавно рассмотрели):  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image054.gif

Подставляем значения http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image036_0003.gif, http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image057.gif и http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image059.gif в формулу http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image047_0000.gif:

http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image061.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image063.gif  
Таким образом, уравнение касательной:  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image065.gif

Это «школьный» вид уравнения прямой с угловым коэффициентом. В высшей математике [**уравнение прямой на плоскости**](http://www.mathprofi.ru/uravnenie_pryamoi_na_ploskosti.html) принято записывать в так называемой *общей форме* http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image067.gif, поэтому перепишем найденное уравнение касательной в соответствии с традицией:   
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image069.gif

Очевидно, что точка http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image071.gif должна удовлетворять данному уравнению:  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image073.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image075.gif – верное равенство.

Следует отметить, что такая проверка является лишь частичной. Если мы неправильно вычислили производную в точке http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image077.gif, то выполненная подстановка нам ничем не поможет.

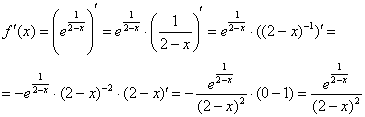
Рассмотрим еще два примера.

Пример 5

Составить уравнение касательной к графику функции http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image079.gif в точке с абсциссой http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image081.gif

Уравнение касательной составим по формуле http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image047_0001.gif

1) Вычислим значение функции в точке http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image081.gif:  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image083.gif

2) Найдем производную. Дважды используем правило дифференцирования сложной функции:  


3) Вычислим значение производной в точке http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image081_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image087.gif

4) Подставим значения http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image081_0001.gif, http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image089.gif и http://www.mathprofi.ru/g/tipovye_zadachi_s_proizvodnoi_clip_image091.gif в формулу

Уравнение касательной к графику функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58876/98387860_fcf0_0130_94e8_12313d00e491.png в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58877/995bf9d0_fcf0_0130_94e9_12313d00e491.png (см. рис. 1) имеет вид:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58878/9a766db0_fcf0_0130_94ea_12313d00e491.png

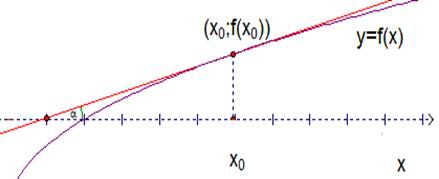


Рис. 1. Касательная к графику функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58876/98387860_fcf0_0130_94e8_12313d00e491.png в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58877/995bf9d0_fcf0_0130_94e9_12313d00e491.png.

Угол наклона касательной связан с производной следующим образом:

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58880/9ca6d4e0_fcf0_0130_94ec_12313d00e491.png. Уравнение касательной полностью определяется значением абсциссы  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58877/995bf9d0_fcf0_0130_94e9_12313d00e491.png, поэтому все задачи на касательную, сложные или несложные, связаны с тем,  чтобы найти точку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58877/995bf9d0_fcf0_0130_94e9_12313d00e491.png. Одним из типов задач на касательную являются приближенные вычисления. В окрестности точки https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58877/995bf9d0_fcf0_0130_94e9_12313d00e491.png значение функции в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58881/9da92e80_fcf0_0130_94ed_12313d00e491.png и значение ординаты касательной в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/58881/9da92e80_fcf0_0130_94ed_12313d00e491.pngотличаются на малую величину. На этом была основана вся теория приближенных вычислений.

Существуют многочисленные задачи на применение касательной.

1, Составить уравнение касательной к графику функции в заданной точке:

1) y = x2 -3x + 4 x0 = 2.

2) y = 3x2  + 6x -8 x0  = -3

3) y = 4x2  - 5x + 6 x0  = -1

4) Y = 2x3+6x2 - 4x + 3 x0  = 4

5) y = x3 -7x2 + 2x -9 x0 = -2

2. Вычислить острый угол, под которым парабола пересекает ось абсцисс:

1) y = x2 - 4

2) y = x2 - 9

3. Найти острый угол между параболами в той точке их пересечения, которая имеет положительную абсциссу:

1) y = x2

y = 2 - x2

2) ) y = x2

y = 8 - x2

3) y = -3x2

y = x2 - 4